

Optimización del balanceo de un mecanismo plano mediante redistribución de masas

Balancing optimization of a planar mechanism by mass redistribution

María T. Orvañanos-Guerrero¹ Mario Acevedo² Claudia N. Sánchez¹
Juan Cisneros-Barba¹ Miguel Carrasco³ Ramiro Velázquez^{1*}

Recibido: 10 de febrero de 2021, aceptado 13 de enero de 2022

Received: February 10, 2021 Accepted: January 13, 2022

RESUMEN

Las técnicas de balanceo de mecanismos han sido utilizadas a lo largo de los años para extender la vida útil de las máquinas reduciendo las vibraciones, el desgaste y la fatiga de sus componentes. Sin embargo, al tiempo que estas técnicas han crecido en efectividad lo han hecho también en complejidad matemática. Hoy en día la mayoría de los métodos de balanceo utilizan coordenadas cartesianas, las cuales generan ecuaciones complejas con funciones trigonométricas difíciles de simplificar. En este artículo se presenta el uso de coordenadas naturales para la obtención de los parámetros de balanceo de un mecanismo manivela-biela-corredera simplificado, evitando de esta forma el uso de funciones trigonométricas. La optimización del balanceo del mecanismo se lleva a cabo utilizando un algoritmo de optimización estocástico basado en poblaciones, permitiendo así la reducción del Momento de Sacudimiento (ShM) en un 97,76% y la reducción de la Fuerza de Sacudimiento (ShF) en un 94,58%.

Palabras clave: Diseño de mecanismos, balanceo dinámico, optimización estocástica, fuerza de sacudimiento, momento de sacudimiento.

ABSTRACT

Balancing methods for mechanisms have been used over the years to extend the lifespan of machinery by reducing vibration, wear, and fatigue on their components. These techniques have grown in effectiveness but also in mathematical complexity. Nowadays most balancing methods use Cartesian coordinates, which generate complex equations involving trigonometric functions that are difficult to simplify. This paper presents the use of natural coordinates to obtain the balancing parameters of a simplified crank-connecting rod-slide mechanism avoiding the use of trigonometric functions. The balancing optimization of the mechanism is carried out by using a stochastic optimization algorithm based on populations allowing to reduce the Shaking Moment (ShM) by 97.76% and the Shaking Force (ShF) by 94.58%.

Keywords: Mechanism design, dynamic balancing, stochastic optimization, shaking force, shaking moment.

¹ Universidad Panamericana. Facultad de Ingeniería. Aguascalientes, México.

E-mail: torvananos@up.edu.mx; cnsanchez@up.edu.mx; 0206586@up.edu.mx; rvelazquez@up.edu.mx

² Universidad Panamericana. Facultad de Ingeniería. Zapopan, México. E-mail: macevedo@up.edu.mx

³ Universidad Adolfo Ibáñez. Facultad de Ingeniería y Ciencias. Santiago, Chile. E-mail: miguel.carrasco@uai.cl

* Autor de correspondencia: rvelazquez@up.edu.mx

INTRODUCCIÓN

El balanceo de mecanismos es un tema de creciente interés dentro de la teoría de máquinas pues permite minimizar las reacciones derivadas del movimiento del mecanismo a fin de prevenir problemas técnicos futuros [1] y costos asociados al mantenimiento [2].

Entre las posibles reacciones que se transmiten a la base de los mecanismos se pueden encontrar fuerzas externas y fuerzas de inercia, éstas últimas debidas principalmente a movimiento con grandes aceleraciones [3]. Los fundamentos teóricos para determinar las fuerzas y los torques de inercia de un mecanismo se han reportado con anterioridad en la literatura [4, 5]. Las fuerzas de inercia ocurren debido a aceleraciones en los eslabones del mecanismo cuando éstos se mueven a altas velocidades y se pueden representar como una fuerza de inercia actuando linealmente a través del centro de masa (CoM por Center of Mass) y un torque inicial igualmente alrededor del CoM [6]. En el campo de la dinámica de mecanismos, la fuerza de inercia producida en la base del mecanismo se conoce como Fuerza de Sacudimiento (ShF por Shaking Force), mientras el torque de inercia que se produce en la base se denomina Momento de Sacudimiento (ShM por Shaking Moment).

En relación con las fuerzas externas, los torques de entrada producidos por motores se convierten en la mayoría de los casos en fuerzas internas. Por lo tanto, si todas las fuerzas externas aplicadas a un eslabón se vuelven fuerzas internas, entonces el balanceo del mecanismo se puede lograr cancelando la ShF y el ShM [6].

En el pasado, el balanceo de mecanismos se llevaba a cabo de forma empírica y en muy pocos casos utilizando cálculos aritméticos simples [7, 8]. A medida que los recursos tecnológicos se volvieron más accesibles y los actuadores más potentes, los mecanismos comenzaron a moverse a velocidades más altas [9], principalmente debido al uso de motores de combustión interna. Fue entonces, cuando surgió la necesidad de establecer principios teóricos para llevar a cabo el balanceo de mecanismos.

Hoy en día, la mayor parte del trabajo ya reportado en la literatura aborda dos tipos de balanceo de mecanismos: el estático y el dinámico. Se

considera que un mecanismo está balanceado cuando la fuerza total aplicada por el mecanismo en su base fija es constante, independientemente de cualquier movimiento del sistema, es decir, el CoM del mecanismo permanece estacionario. Este tipo de balanceo se conoce como balanceo estático [10]; llamado así porque es fácil de detectar en condiciones estáticas [3]. Por otro lado, el balanceo dinámico considera naturalmente mecanismos en movimiento. En este caso, la base del mecanismo no experimenta ninguna fuerza o momento. Las cadenas de transmisión cerradas continúan siendo ampliamente utilizadas para el diseño de nueva maquinaria que funciona cada vez a mayores velocidades y niveles de precisión [11].

En la actualidad, uno de los retos más importantes en el balanceo de mecanismos es obtener soluciones que puedan ser implementadas eficientemente y funcionen bien en la práctica, logrando de esta forma la reducción de efectos indeseados como son el ruido, la fatiga y el desgaste. En general, muchas de las soluciones de balanceo actuales aumentan considerablemente la masa total del mecanismo así como su complejidad, reduciendo en consecuencia su rendimiento [12].

Con pocas excepciones [13-15], la mayoría de los trabajos presentados utilizan coordenadas cartesianas para obtener las condiciones de balanceo de varios tipos de mecanismos. El objetivo de este trabajo es presentar, a través de un ejemplo de mecanismo sencillo, la facilidad de uso de coordenadas naturales, también conocidas como coordenadas completamente cartesianas (FCC por Fully Cartesian Coordinates) [16], para derivar las ecuaciones que definen la ShF y el ShM del mecanismo. Una vez que las condiciones de balanceo se obtienen, se lleva a cabo una combinación lineal de objetivos y se emplea el algoritmo de optimización de evolución diferencial para minimizar el desbalance del mecanismo teniendo control sobre los parámetros de optimización, garantizando de esta forma que la masa final del mecanismo se mantenga dentro de límites razonables.

ANÁLISIS MECÁNICO

Un mecanismo manivela-biela-corredera se utiliza normalmente para transformar el movimiento circular en movimiento rectilíneo. Es un sistema reversible,

es decir que también convierte el movimiento lineal en movimiento giratorio.

El ejemplo más común de este mecanismo se encuentra en las locomotoras de vapor (Figura 1a) y en los motores de combustión interna de un automóvil, en los cuales el movimiento lineal de un pistón (generado a través de la explosión de la gasolina) es transferido a una biela, convirtiéndose en movimiento rotatorio en el cigüeñal (Figura 1b).

La Figura 2 muestra la forma general de un mecanismo manivela (segmento AB), biela (segmento BC). El sistema de coordenadas (x, y) corresponde al sistema de referencia global del mecanismo, mientras que los sistemas (x_n, y_n) representan los sistemas de coordenadas locales para los n eslabones del mecanismo, cada uno de los cuales tiene una masa m_n . Se considera que su CoM se encuentra ubicado en las coordenadas (x_{Gn}, y_{Gn}) con respecto al sistema de referencia local.

El mecanismo manivela-biela-corredera simplificado corresponde a un sistema de un grado de libertad, que es controlado en este caso por un motor eléctrico ubicado en el punto A , que gira a una velocidad ω [rads/s]; l_1 y l_2 y representan la longitud de cada una de las barras.

En este estudio, se busca llevar a cabo la redistribución de la masa, minimizando las reacciones dinámicas que el mecanismo transmite a la base, calculando las dimensiones y la localización de los CoM de los contrapesos (por la simplicidad de implementación que ello supone). El mecanismo con la adición de dos contrapesos (c_1 y c_2) se muestra en la Figura 3.

Cada uno de estos contrapesos tiene su CoM m_{cn} ubicado en las coordenadas (x_{cn}, y_{cn}) de su correspondiente sistema de coordenadas locales. Los contrapesos están dispuestos de tal forma que uno de sus extremos queda exactamente unido al punto del origen del sistema de coordenadas locales,

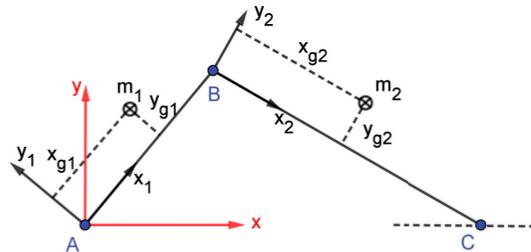


Figura 2. Mecanismo manivela-biela-corredera.

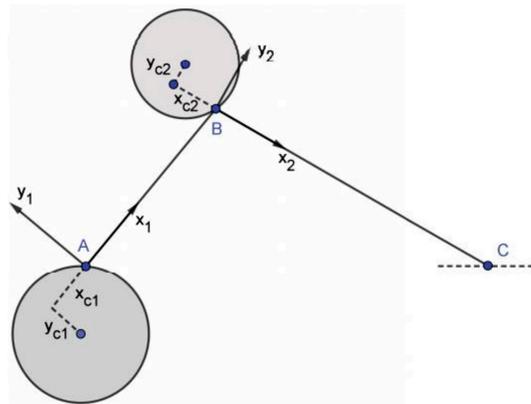
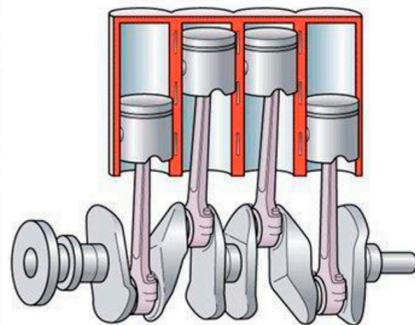


Figura 3. Mecanismo manivela-biela-corredera simplificado con contrapesos.



(a)



(b)

Figura 1. Mecanismo manivela-biela-corredera en: (a) locomotora y (b) motor de automóvil.

de ahí que su radio se encuentre definido por la ubicación del CoM, ecuación (1):

$$r_{cn} = \sqrt{x_{cn}^2 + y_{cn}^2} \quad (1)$$

Conociendo la densidad de cada contrapeso ρ_n , la ecuación (2) permite calcular su masa en función del espesor (t_{cn}) y la ubicación de su CoM (x_{cn} , y_{cn}) en relación con el sistema de coordenadas locales.

$$m_{cn} = \pi\rho_{cn}t_{cn}(y_{cn}^2 + x_{cn}^2) \quad (2)$$

La masa total de cada uno de los elementos del mecanismo queda definida por la masa de la barra original (m_{bn} para $n = 1,2$) en conjunto con la masa del contrapeso (m_{cn}) que se encuentra unido a esa barra, es decir, $m_n = m_{bn} + m_{cn}$. La ecuación (3) define la inercia total de cada elemento que se obtiene al sumar la inercia de la barra original I_{bn} con la inercia del contrapeso correspondiente I_{cn} :

$$I_n = I_{cn} + I_{bn} = \frac{3m_{cn}(y_{cn}^2 + x_{cn}^2)}{2} + I_{bn} \quad (3)$$

La posición de las coordenadas (x_{Gn} , y_{Gn}) del CoM de cada elemento n puede ser definida por medio de la ecuación (4) y ecuación (5).

$$x_{Gn} = \frac{m_{cn}x_{cn} + m_{bn}x_{bn}}{m_{cn} + m_{bn}} \quad (4)$$

$$y_{Gn} = \frac{m_{cn}y_{cn} + m_{bn}y_{bn}}{m_{cn} + m_{bn}} \quad (5)$$

Donde x_{cn} , y_{cn} son las posiciones del CoM de cada contrapeso, y x_{bn} , y_{bn} son las posiciones del CoM para cada segmento original de barra, ambos medidos desde sus orígenes locales.

Matriz de masa del mecanismo de manivela-biela-corredera simplificado usando coordenadas naturales

Para obtener la matriz de masas M del mecanismo completo, es necesario conocer las matrices de masa de cada uno de sus eslabones M_n , para $n = 1,2$; éstas se pueden calcular mediante la ecuación (6) [17]:

$$M_n = \begin{bmatrix} a_n & 0 & b_n & c_n \\ 0 & a_n & -c_n & b_n \\ b_n & c_n & d_n & 0 \\ -c_n & b_n & 0 & d_n \end{bmatrix} \quad (6)$$

La matriz de masa M correspondiente al mecanismo completo tendrá una dimensión de 6×6 (ya que el mecanismo está definido por tres puntos básicos, cada uno con dos coordenadas). Las columnas 0 y 1 están relacionadas con el punto **A**, las columnas 2 y 3 están relacionadas con el punto **B**. Finalmente, las columnas 4 y 5 están relacionadas con el punto **C**. De esta manera, las filas pueden relacionarse exactamente de la misma forma que el orden de las columnas. Entonces es posible colocar las matrices de masa de cada elemento dentro de la matriz global como se muestra en la ecuación (7).

$$M = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & b_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & -c_1 & b_1 & 0 & 0 \\ b_1 & c_1 & a_2 + d_1 & 0 & b_2 & c_2 \\ -c_1 & b_1 & 0 & a_2 + d_1 & -c_2 & b_2 \\ 0 & 0 & b_2 & c_2 & a_3 + d_2 & 0 \\ 0 & 0 & -c_2 & b_2 & 0 & a_3 + d_2 \end{bmatrix} \quad (7)$$

Momento lineal y fuerza de sacudimiento

Para definir las características cinemáticas del mecanismo se establecen los vectores de posiciones q , velocidades \dot{q} y aceleraciones \ddot{q} para cada uno de los puntos básicos utilizados en la matriz de masas M . Éstos son la ecuación (8), ecuación (9) y ecuación (10), respectivamente:

$$q = [A_X \ A_Y \ B_X \ C_Y \ C_X \ C_Y]^T \quad (8)$$

$$\dot{q} = [VA_X \ VA_Y \ VB_X \ VB_Y \ VC_X \ VC_Y]^T \quad (9)$$

$$\ddot{q} = [AA_X \ AA_Y \ AB_X \ AB_Y \ AC_X \ AC_Y]^T \quad (10)$$

Ahora, es posible determinar el momento lineal L asociado a todo el sistema mediante la ecuación (11):

$$\begin{bmatrix} L_i \\ L_j \end{bmatrix} = BM\dot{q} \quad (11)$$

Donde B , definido en la ecuación (12), es una matriz formada por tantas matrices identidad como puntos básicos del mecanismo, en este caso se tienen tres puntos básicos, por lo tanto la matriz B tendrá una dimensión de 2×6 .

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (12)$$

Resolviendo la ecuación (11) y considerando que las velocidades relacionadas con **A** serán siempre cero por ser éste un punto fijo ($VA_x = 0, VA_y = 0$), y la velocidad en la coordenada y del punto **C** será también cero puesto que no existe movimiento en esta dirección ($VC_y = 0$), se obtienen así las expresiones correspondientes al momento lineal (L_i y L_j). Las ecuaciones que definen la ShF de todo el mecanismo se pueden calcular derivando L_i y L_j con respecto al tiempo. Esto es ecuación (13):

$$ShF_i = \frac{dL_i}{dt} \quad ShF_j = \frac{dL_j}{dt} \quad (13)$$

Momento angular y momento de sacudimiento
 Cuando se emplean FCC, el momento angular H correspondiente al mecanismo completo, puede obtenerse utilizando la ecuación (14).

$$H = q \times (M\dot{q}) = rM\dot{q} \quad (14)$$

Donde r está dado en función de las posiciones de los puntos básicos del sistema, ecuación (15):

$$r = [-A_x \ A_y \ -B_x \ B_y \ -C_x \ C_y]^T \quad (15)$$

El resultado de esta operación es un valor escalar puesto que al tratarse de un mecanismo en dos dimensiones el resultado siempre estará dirigido a lo largo del eje z. Simplificando la ecuación (14) y considerando que las velocidades del punto **A** siempre son cero por ser éste un punto fijo y la velocidad en la coordenada y del punto **C** será también cero puesto que no existe movimiento en esta dirección, y finalmente derivando con respecto al tiempo, es posible obtener la expresión del ShM de todo el mecanismo, ecuación (16).

$$ShM = \frac{dH}{dt} = rM\ddot{q} + \dot{r}M\dot{q} \quad (16)$$

Las ecuaciones correspondientes al ShF y al ShM definen las reacciones del mecanismo para un instante de tiempo determinado. Sin embargo, para llevar a cabo el análisis del mecanismo es necesario conocer estos valores a lo largo de un ciclo completo de trabajo **T**. Estos valores pueden obtenerse a través del cálculo de la cinemática directa del mecanismo. En este trabajo se utilizó el software CAD Solidworks para obtener dichos parámetros.

FUNCIÓN OBJETIVO

Para llevar a cabo el balanceo dinámico del mecanismo manivela-biela-corredera simplificado es necesario considerar un problema de optimización multi-objetivo, ya que se desea minimizar tanto la ShF como el ShM. Es por ello que se emplean dos índices adimensionales β que permiten la combinación lineal de los valores a optimizar. Dichos índices se calculan mediante el valor RMS a lo largo del periodo de tiempo **T** de la reacción del mecanismo optimizado con respecto al valor RMS del mecanismo sin optimizar.

Considerando que en el intervalo de tiempo **T** se tienen N muestras para los vectores de las ecuaciones (8, 9 y 10), los valores RMS de las reacciones pueden ser calculados tal como se muestra en las ecuaciones (17-20), en donde $rms(ShM)$ y $rms(ShF)$ representan las reacciones de los ShM y las ShF, respectivamente del mecanismo sin optimizar.

Por otra parte ${}^\circ rms(ShF)$ y ${}^\circ rms(ShM)$ representan las reacciones de las ShF y los ShM, respectivamente del mecanismo con el balanceo optimizado. Los valores correspondientes a ShF_{ik} , ShF_{jk} y ShM_k son escalares; ${}^\circ ShF_{ik}$, ${}^\circ ShF_{jk}$ y ${}^\circ ShM_k$ pueden ser calculados usando las ecuaciones obtenidas para la ShF y el ShM en la sección anterior en las que permanecen las variables relacionadas con los contrapesos.

$$rms(ShF) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (ShF_{ik}^2 + ShF_{jk}^2)} \quad (17)$$

$$rms({}^\circ ShF) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N ({}^\circ ShF_{ik}^2 + {}^\circ ShF_{jk}^2)} \quad (18)$$

$$rms(ShM) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N ShM_k^2} \quad (19)$$

$$rms({}^\circ ShM) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N {}^\circ ShM_k^2} \quad (20)$$

De esta forma, el índice de balanceo relacionado con la ShF se define por la ecuación (21), mientras que el índice de balanceo relacionado con el ShM por la ecuación (22).

$$\beta_{ShF} = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^N (ShF_{ik}^2 + ShF_{jk}^2)}{\sum_{k=1}^N ({}^\circ ShF_{ik}^2 + {}^\circ ShF_{jk}^2)}} \quad (21)$$

$$\beta_{ShM} = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^N ShM_k^2}{\sum_{k=1}^N {}^\circ ShM_k^2}} \quad (22)$$

Ambos índices de balanceo quedan expresados como ecuaciones no lineales y el problema de optimización consiste en minimizarlos, de forma que para lograrlo se implementa una combinación lineal de objetivos tal como puede apreciarse en la ecuación (23). Aquí $X = [x_{c1}, y_{c1}, t_{c1}, x_{c2}, y_{c2}, t_{c2}]$ corresponde al vector que contiene las variables a ser optimizadas; es un valor escalar que da importancia a cada uno de los objetivos de la optimización.

$$f(X) = \gamma \cdot \beta_{ShM} + (1 - \gamma) \cdot \beta_{ShF} \quad (23)$$

Los límites para las variables a optimizar se definen de acuerdo con la ecuación (24):

$$\begin{aligned} x_{cn}^{min} &\leq x_{cn} \leq x_{cn}^{max} \\ y_{cn}^{min} &\leq y_{cn} \leq y_{cn}^{max} \\ t_{cn}^{min} &\leq t_{cn} \leq t_{cn}^{max} \end{aligned} \quad (24)$$

ALGORITMO DE OPTIMIZACIÓN

Se utilizó el algoritmo de Evolución Diferencial (DE) para llevar a cabo la optimización del balanceo del mecanismo. DE es un algoritmo de optimización estocástica, basado en poblaciones, desarrollado por Rainer Storn y Kenneth Price en 1997 [18]. Al ser un algoritmo evolutivo, utiliza mecanismos inspirados en la teoría de la evolución, donde los individuos más aptos de una población (aquellos con las características que les permiten sobrevivir más tiempo) son los que tienen más descendencia, heredando así las buenas características de sus padres, dándole a la nueva generación una mejor oportunidad de sobrevivir. Para lograr esta evolución se utilizan mecanismos similares a los que existen en la naturaleza, tales como mutación, recombinación y selección.

Para este caso en particular, se creó una población de N individuos, identificando al i -ésimo individuo

de la generación g con el vector $x_{i,g}$ que evolucionó a partir de algunas generaciones. El individuo se inicializó siguiendo una distribución uniforme con límites entre los rangos permitidos para cada variable. Se seleccionaron tres individuos para realizar la mutación aleatoria: $x_{r0,g}$, $x_{r1,g}$ y $x_{r2,g}$, para generar un nuevo individuo: $v_{i,g} = x_{r0,g} + F \cdot (x_{r1,g} - x_{r2,g})$, siendo F un número aleatorio entre F_a y F_b .

La combinación se realizó entre los individuos $x_{i,g}$ y $x_{r1,g}$ para generar un tercero llamado $u_{i,g}$ teniendo en cuenta la probabilidad P_{Gr} . Luego se evaluaron $x_{i,g}$ y $u_{i,g}$ en la función a optimizar y se eligió la que tenía los mejores resultados para formar parte de la próxima generación.

Las generaciones se repitieron hasta que la desviación estándar de las habilidades de los individuos dividida por el promedio de sus habilidades superó un umbral definido. Los valores utilizados en este trabajo son: $F_a = 0,5$, $F_b = 1$, $PCr = 0,7$, $T = 0,000001$ y $N = 15V$, donde V es el número de variables a optimizar; seis en este caso. Estos valores, recomendados generalmente como adecuados para iniciar el proceso de optimización [18], son convenientes para esta aplicación ya que el número de variables a optimizar no es demasiado grande.

ANÁLISIS NUMÉRICO

Características mecánicas y límites de optimización

La Tabla I muestra los parámetros físicos del mecanismo manivela-biela-corredera simplificado de la Figura 1. Todos los eslabones se consideran de acero aleado fundido con una densidad de 7300 kg/m^3 . Los contrapesos se consideran de latón con una densidad de 8500 kg/m^3 .

El mecanismo es impulsado por un motor ubicado en el punto **A**, que gira a una velocidad angular constante ω de 500 rpm. Usando cinemática directa, es posible obtener N muestras correspondientes a las posiciones, velocidades y aceleraciones, cuyas expresiones se muestran en las ecuaciones (8, 9) y (10), respectivamente, correspondientes a cada uno de los puntos básicos del mecanismo. Estos valores se pueden apreciar en la Figura 4, Figura 5 y Figura 6. El punto **A** siempre permanece estático ($A_x = 0$, $A_y = 0$) y el punto **C** solo muestra movimiento

Tabla 1. Parámetros de cada eslabón del mecanismo manivela-biela-corredera simplificado.

Parámetro	Unidades	$n = 1$	$n = 2$
Masa m_{b_s}	[kg]	1,64346901	2,51946901
Longitud l_n	[m]	0,250	0,400
Inercia I_{b_n}	[kg·m ²]	0,03677077	0,14023528
Centro de masa x_{b_n}	[m]	0,125	0,200
Centro de masa y_{b_n}	[m]	0,000	0,000

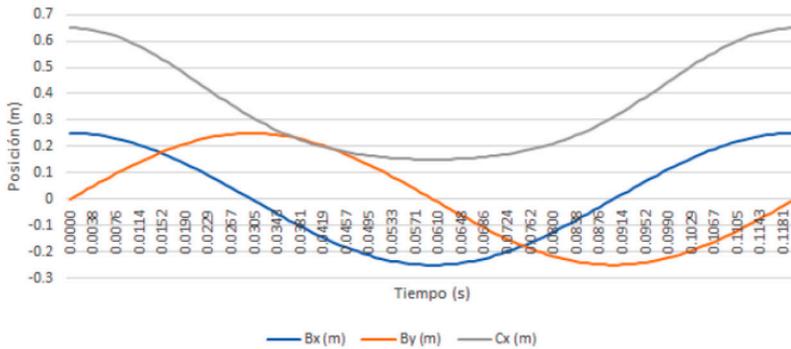


Figura 4. Posiciones de los puntos básicos del mecanismo manivela-biela-corredera simplificado.

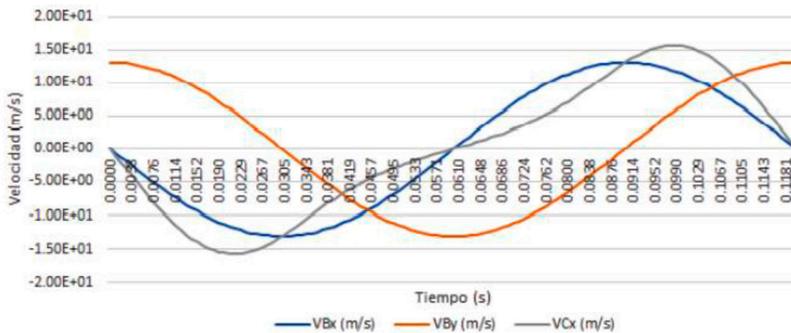


Figura 5. Velocidades de los puntos básicos del mecanismo manivela-biela-corredera simplificado.

en el eje x ($C_y = 0$), por lo tanto sólo se muestran los valores de B_x , B_y y C_x . Lo mismo ocurre con la Figura 5 y Figura 6 donde sólo se muestran las velocidades y aceleraciones de los puntos **B** (en los ejes x y y) y **C** (en el eje x).

El algoritmo de optimización se ejecutó hasta obtener 200 soluciones válidas (es decir, aquellos resultados en los que la función objetivo da valores en

el rango de (0,1)). Los valores de γ se generan como valores aleatorios con distribución uniforme en el rango (0,1) como se recomienda para la búsqueda aleatoria de hiperparámetros [19].

Para el ejemplo numérico propuesto y tomando en cuenta las características del mecanismo, los límites considerados para la optimización son los de la ecuación (25):

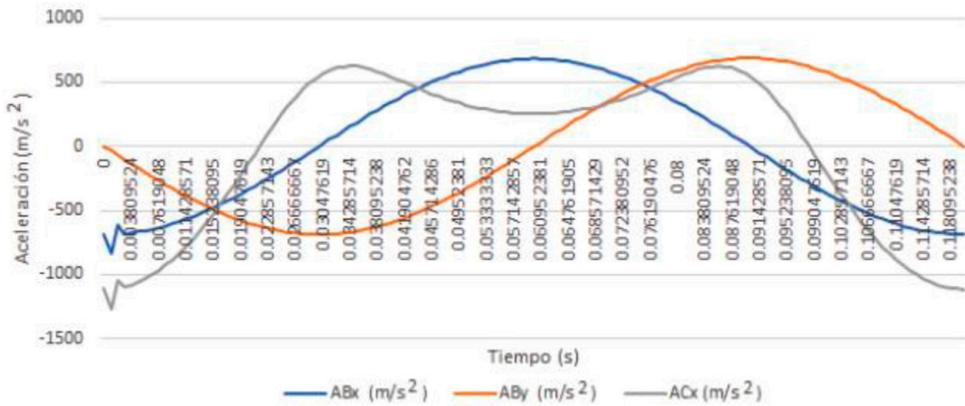


Figura 6. Aceleraciones de los puntos básicos del mecanismo manivela-biela-corredera simplificado.

$$\begin{aligned}
 -0,15m &\leq x_{cn} \leq 0,15m \\
 -0,15m &\leq y_{cn} \leq 0,15m \\
 0,005m &\leq t_{cn} \leq 0,04m
 \end{aligned}
 \tag{25}$$

Frente de Pareto

La Figura 7a muestra la relación entre los valores β_{ShF} y β_{ShM} para todas las soluciones encontradas a lo largo del proceso de optimización de la ecuación (23). Se utilizan diferentes colores para representar el valor utilizado para en la función objetivo $F(X)$.

Por otro lado, en la Figura 7b los puntos azul oscuro representan el Frente de Pareto, mientras que los

puntos en azul claro representan las soluciones dominadas. El Frente de Pareto es una herramienta útil para analizar los resultados cuando, al realizar una optimización multi-objetivo, se presentan dos objetivos en conflicto [20]. Una solución X_a domina a otra X_b cuando sus dos valores son mejores que los de la solución X_b . El Frente de Pareto se compone de las soluciones dominantes.

Resultados Numéricos

Analizando el Frente de Pareto, es posible seleccionar las soluciones que resultan más adecuadas según el objetivo deseado. De esta forma, si el interés principal es minimizar la ShF, entonces lo mejor es seleccionar el punto del Frente de Pareto más

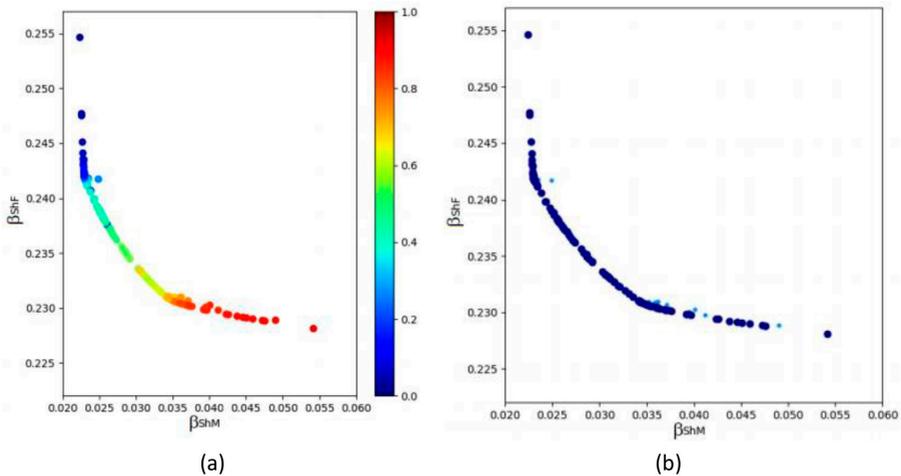


Figura 7. Análisis con Frente de Pareto: (a) β_{ShF} y β_{ShM} optimizados de acuerdo a γ . (b) Resultados de la optimización.

cercano a $ShF = 0$. Por otro lado, si el objetivo es minimizar el ShM , entonces la mejor opción es seleccionar el punto en el Frente de Pareto más cercano a $ShM = 0$. Ahora bien, si el interés es reducir ambos (ShF y ShM), es posible elegir como solución un punto en el frente de Pareto cercano a cero en ambos ejes.

Se utilizan dos soluciones del Frente de Pareto para ilustrar los resultados numéricos.

La primera solución elegida es el mejor resultado para la optimización del ShF ($\beta_{ShM} = 0,22813353$, $\beta_{ShF} = 0,054189473$), se obtiene cuando las variables optimizadas son:

$$\begin{aligned} x_{c1} &= -0,109393564 & y_{c1} &= -0,0000263 & t_{c1} &= 0,04 \\ x_{c2} &= -0,050293307 & y_{c1} &= -0,00036442 & t_{c2} &= 0,04 \end{aligned}$$

La Figura 8 muestra la comparación entre la ShF (x y y) del mecanismo original con respecto al optimizado (ShF opt). Al utilizar esta solución, la

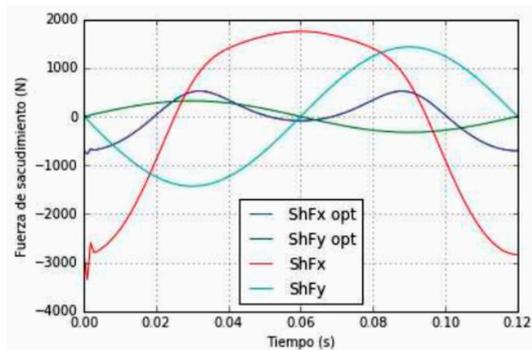


Figura 8. ShF resultante (1ª solución seleccionada).

mejora del ShF fue del 77,19% y la mejora del ShM fue del 94,58%. La Figura 9 compara el ShM del mecanismo original y el ShM opt del balanceado.

La segunda solución elegida es el mejor resultado para la optimización del ShM ($\beta_{ShF} = 0,254639632$, $\beta_{ShM} = 0,022358008$). Ésta se puede obtener cuando las variables optimizadas son:

$$\begin{aligned} x_{c1} &= -0,09647414 & y_{c1} &= -0,0000242 & t_{c1} &= -0,04 \\ x_{c2} &= -0,09484655 & y_{c2} &= -0,00057055 & t_{c2} &= 0,005 \end{aligned}$$

La Figura 10 compara la ShF (en ambos ejes) del mecanismo original y la ShF opt (utilizando los contrapesos) logrando una mejora del 74,53%. La Figura 11 compara los ShM del mecanismo original y el optimizado. En este caso, la mejora de ShM fue del 97,76%.

La Figura 12 muestra la implementación conceptual de esta solución en el mecanismo simulado a través del software Solidworks.

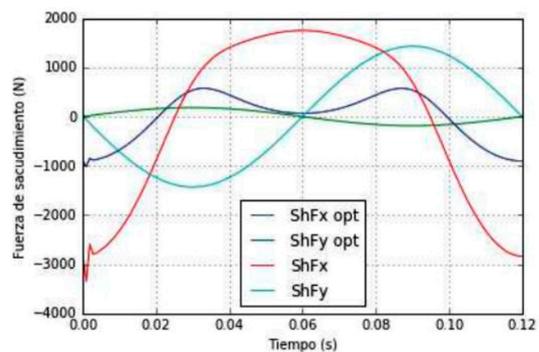


Figura 10. ShF resultante (2ª solución seleccionada).

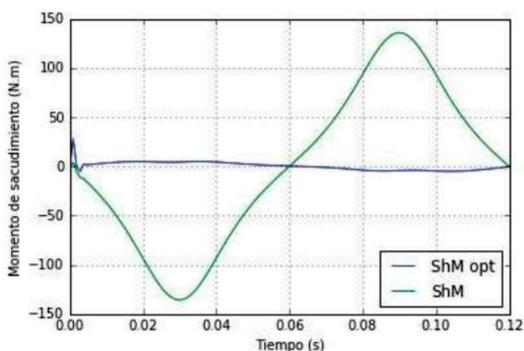


Figura 9. ShM resultante (1ª solución seleccionada).

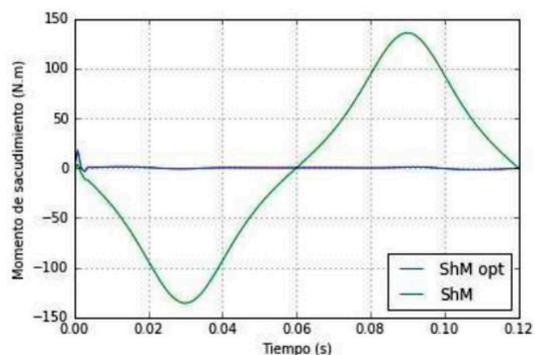


Figura 11. ShM resultante (2ª solución seleccionada).

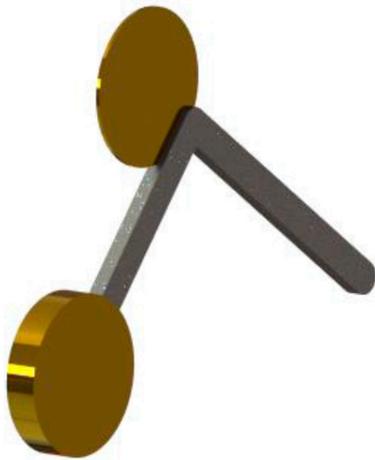


Figura 12. Implementación de la segunda solución seleccionada.

CONCLUSIONES

El uso de FCC para representar el mecanismo manivela-biela-corredera simplificado permite obtener ecuaciones menos complejas que las obtenidas usando otros tipos de coordenadas al no involucrar funciones trigonométricas.

El método simple de la combinación lineal de funciones para resolver el problema de optimización multi-objetivo es una forma robusta de manejar este tipo de problemas. El uso de FCC para representar el mecanismo manivela-biela-corredera simplificado junto con el algoritmo DE para optimizar el balance del mecanismo es una metodología adecuada que permite la reducción del ShM en un 97,76% (con una reducción del 74,53% en la ShF) o en un 94,58% (con una reducción del 77,19% en la ShF).

La Tabla 2 compara los porcentajes de mejora obtenidos para el balanceo de la ShF y el ShM del

presente trabajo con otros resultados previamente reportados en la literatura. Es posible observar que el uso de FCC para definir la matriz de masas del mecanismo en conjunto con el algoritmo de evolución diferencial (DE) resulta en un método adecuado que permite la obtención de buenos resultados de optimización en el balanceo de mecanismos.

Como trabajo futuro, se desea explorar otros algoritmos de optimización como PSO (Optimización de enjambre de partículas), PGD (Descenso de Gradiente Proyectado) y algoritmos basados en enseñanza-aprendizaje.

REFERENCIAS

- [1] G. Lowen and R. Berkof. "Survey of investigations into the balancing of linkages". *Journal of Mechanisms*. Vol. 3 N° 4, pp. 221-231. 1968. DOI: 10.1016/0022-2569(68)90001-3.
- [2] V.F. Barriento and J.A. Achcar. "Statistical analysis of equipment maintenance time in the food industry: A case study to identify sources of impact on performance". *Ingeniare*. Vol. 27 N° 1, pp. 151-163. DOI: 10.4067/S0718-33052019000100151.2019.
- [3] V. Arakelian and S. Briot. "Balancing of linkages and robot manipulators". Springer. First edition Vol. 27. DOI: 10.1007/978-3-319-12490-2. 2015.
- [4] J.J. Uicker, G.R. Pennock and J.E. Shigley. "Theory of Machines and Mechanisms". Oxford University Press. New York, USA. ISBN: 978-0195371239. 2011.
- [5] K.J. Waldron, G.L. Kinzel, K. Waldron and G. Kinzel. "Kinematics, Dynamics, and Design of Machinery". John Wiley & Sons. ISBN: 978-0471244172. 2016.
- [6] V. Arakelian. "Inertia forces and moments balancing in robot manipulators: a review".

Tabla 2. Comparación de resultados de optimización del mecanismo manivela-biela-corredera.

Referencia	Algoritmo de optimización	% de mejora en el balanceo de la ShF	% de mejora en el balanceo del ShM
[21]	Evolución Diferencial	61,42%	65,96%
[22]	Algoritmo basado en enseñanza-aprendizaje	48%	44%
[23]	Algoritmo Genético	46%	99%
Esta investigación	Evolución Diferencial	77,19%	94,58%
Esta investigación	Evolución Diferencial	74,53%	97,76%

- Advanced Robotics. Vol. 31 N° 4, pp. 717-726. 2017. DOI: 10.1080/01691864.2017.1348984.
- [7] R. Haines. “Minimum RMS shaking moment or driving torque of a force-balanced 4-bar linkage using feasible counterweights”. *Mechanism and Machine Theory*. Vol. 16 N° 3, pp. 185-195. 1981. DOI: 10.1016/0094-114X(81)90034-3.
- [8] V. Arakelian, M. Dahan and M. Smith. “A historical review of the evolution of the theory on balancing of mechanisms”. *International Symposium on History of Machines and Mechanisms*, pp. 291-300. 2000. DOI: 10.1007/978-94-015-9554-4_33.
- [9] E. Estupiñán, C. San Martín y L. Canales. “Desarrollo de un instrumento virtual para el balanceamiento dinámico de rotores”. *Ingeniare*. Vol. 14 N° 2, pp. 146-152. 2006. DOI: 10.4067/S0718-33052006000100008.
- [10] C.M. Gosselin, B. Moore, and J. Schicho. “Dynamic balancing of planar mechanisms using toric geometry”. *Journal of Symbolic Computation*. Vol. 44 N° 9, pp. 1346-1358. 2009. DOI: 10.1016/j.jsc.2008.05.007.
- [11] J.P. Merlet and C. Gosselin. “Parallel Mechanisms and Robots”. Springer, Berlin, Heidelberg, pp. 269-285. DOI: 10.1007/978-3-540-30301-5_13. 2008.
- [12] V. van der Wijk, J. Herder and B. Demeulenaere. “Comparison of various dynamic balancing principles regarding additional mass and additional inertia”. *Journal of Mechanisms and Robotics*. Vol. 1 N° 4, pp. 1-9. 2009. DOI: 10.1115/1.3211022.
- [13] M.T. Orvañanos-Guerrero, C.N. Sánchez, M. Rivera, M. Acevedo and R. Velazquez. “Gradient descent-based optimization method of a four-bar mechanism using fully cartesian coordinates”. *Applied Sciences*. Vol. 9 N° 19. 2019. DOI: 10.3390/app9194115.
- [14] M. Acevedo, M.T. Orvananos-Guerrero, R. Velazquez and E. Haro. “Optimum balancing of the four-bar linkage using fully cartesian coordinates”. *IEEE Latin America Transactions*. Vol. 17 N° 6, pp. 983-990. 2019. DOI: 10.1109/TLA.2019.8896821.
- [15] M.T. Orvananos-Guerrero, C.N. Sanchez, O. Davalos-Orozco, M. Rivera, R. Velazquez and M. Acevedo. “Using fully cartesian coordinates to calculate the support reactions of multi-scale mechanisms”. *Nanotechnology for Instrumentation and Measurement*, pp. 1-6. 2018. DOI: 10.1109/NANOFIM.2018.8688610.
- [16] J. García de Jalón. “Twenty-five years of natural coordinates”. *Multibody System Dynamics*. Vol. 18, pp. 15-33. 2007. DOI: 10.1007/s11044-007-9068-0.
- [17] J. Garcia de Jalón and E. Bay. “Kinematic and Dynamic Simulation of Multibody Systems: The Real-Time Challenge. Springer. ISBN: 978-1-4612-2600-0. 1994.
- [18] R. Storn and K. Price. “Differential evolution - A simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces”. *Journal of Global Optimization*. Vol. 11, pp. 341-359. 1997. DOI: 10.1023/A:1008202821328.
- [19] J. Bergstra and Y. Bengio. “Random search for hyper-parameter optimization”. *Journal of Machine Learning Research*. Vol. 13, pp. 281-305. 2012.
- [20] N. Nariman-Zadeh, M. Felezi, A. Jamali and M. Ganji. “Pareto optimal synthesis of four-bar mechanisms for path generation”. *Mechanism and Machine Theory*. Vol. 44 N° 1, pp. 180-191. 2009. DOI: 10.1016/j.mechmachtheory.2008.02.006.
- [21] G. Etesami, M.E. Felezi and N. Nariman-Zadeh. “Pareto optimal multi-objective dynamical balancing of a slider-crank mechanism using differential evolution algorithm”. *International Journal of Automotive Engineering*. Vol. 9 N° 3, pp. 3021-3032. 2019. DOI: 10.22068/ijae.9.3.3021.
- [22] K. Chaudhary and H. Chaudhary. “Optimal design of planar slider-crank mechanism using teaching-learning-based optimization algorithm”. *Journal of Mechanical Science and Technology*. Vol. 29, pp. 5189-5198. 2015. DOI: 10.1007/s12206-015-1119-5.
- [23] K. Chaudhary and H. Chaudhary. “Optimum balancing of slider-crank mechanism using equimomental system of point-masses”. *Procedia Technology*. Vol. 14, pp. 35-42. 2014. DOI: 10.1016/j.protcy.2014.08.006.